Aula 17

Definição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função contínua sobre os pontos duma curva $C \subset D_f$ a qual é parametrizada por um caminho seccionalmente regular $\gamma : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, com $C = \gamma([t_0, t_1])$. Então, define-se o **integral de f ao longo de** γ, e representa-se por $\int_\gamma f(z)dz$, ou mais simplesmente $\int_\gamma f$, como

$$\int_\gamma f(z)dz := \sum_{j=0}^{n-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Exemplos:

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2}\,dz = 0$$

Proposição: Sejam $f, g : \Omega \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções contínuas, $a, b \in \mathbb{C}$ constantes, e $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ parametrizações seccionalmente regulares de curvas em Ω. Então, tem-se

- $\displaystyle\int_\gamma (af + bg) = a \int_\gamma f + b \int_\gamma g.$
- $\displaystyle\int_{-\gamma} f = - \int_\gamma f$ ($-\gamma$ designa a parametrização em sentido inverso de γ).
- $\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$ ($\gamma_1 + \gamma_2$ designa a concatenação dos caminhos γ_1 e γ_2).

Proposição: Um caminho $\tilde{\gamma} : [\tilde{t_0}, \tilde{t_1}] \to \mathbb{C}$ diz-se uma **reparametrização** da curva parametrizada por $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ se existe uma aplicação de classe C^1 $\alpha : [t_0, t_1] \to [\tilde{t_0}, \tilde{t_1}]$, com $\alpha'(t) > 0$ para todo o t, e $\alpha(t_0) = \tilde{t_0}$, $\alpha(t_1) = \tilde{t_1}$, tal que $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\alpha(t))$. Nesse caso, dada uma função contínua f nos pontos da curva, tem-se

$$\int_\gamma f = \int_{\tilde{\gamma}} f.$$

Proposição: Sejam $f : D_f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função contínua nos pontos duma curva em Ω parametrizada por um caminho seccionalmente regular γ. Então, tem-se

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \sup_{t} |f(\gamma(t))|,$$

onde $L(\gamma)$ designa o comprimento percorrido pela parametrização γ e dado por $\int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)|dt$.